

Blick in den Vulkan

Simulation gekoppelter hydraulischer und elektromagnetischer Felder in einem geologischen Hochrisikosystem

Sven Friedel und Franz Jacobs

Vulkanausbrüche gelten als unberechenbar. Dennoch sind diese eindrucksvollen Naturschauspiele, die eine zunehmende Anzahl von Menschen bedrohen, das Ergebnis deterministischer physikalischer und chemischer Prozesse. Prinzipiell lassen sich diese durch partielle Differentialgleichungen ausdrücken. Allein die Komplexität ihrer Kopplungen verhindert oft eine angemessene Beschreibung. Neue Werkzeuge in der mathematischen Simulation eröffnen Vulkanologen jetzt tiefere Einsichten in das Wesen vulkanischer Prozesse und unterstützen deren Vorhersage.

1) Hersteller: COMSOL AB, Stockholm, weitere Informationen unter www.femlab.de.

2) Dies gilt besonders für andesitische Vulkane wie den Merapi in Zentral-Java, der durch die Leipziger Vulkanologen intensiv erforscht wird.

Dr. Sven Friedel, Institut für Geotechnik, ETH Zürich, 8093 Zürich, HIL C 34.5; Prof. Dr. Franz Jacobs, Universität Leipzig, Institut für Geophysik und Geologie, Lehrstuhl Physik der Erde

Wissenschaftler der Universität Leipzig, der ETH Zürich und des IPG Paris beschäftigen sich zur Zeit intensiv mit der Frage, wie sich elektromagnetische Felder zur Erkundung und Überwachung von Vulkanen einsetzen lassen. Im Brennpunkt des Interesses stehen hierbei elektrokinetische Potentiale, die durch Strömungen von Wässern und Gasen in porösen Gesteinen hervorgerufen werden. Diese Strömungen, so vermutet man, sind empfindliche Anzeiger von Veränderungen im Vulkangebäude noch lange vor mechanischen Veränderungen oder Eruptionen. Die Interpretation von Messdaten und die Optimierung von Erkundungsstrategien im Feld erfordert die numerische Simulation der zugrunde liegenden Prozesse. Die Anforderungen an geeignete Simulationswerkzeuge sind hoch: Sehr unterschiedliche physikalische Effekte wie hydraulische Strömungen und elektromagnetische Felder müssen nichtlinear miteinander koppelbar sein (Multiphysik-Fähigkeit). Auch

sollte es möglich sein, Standardgleichungen um neue Terme zu erweitern. Schließlich ist es notwendig, die Berechnungen in einem komplexen 3D-Geländemodell auszuführen.

Dieser Anwenderbericht beschreibt den Einsatz des Simulationssystems FEMLAB^{®1)} zur Finite-Elemente-Berechnung von elektrischen und magnetischen Feldern, die durch Strömung von Wasser durch einen porösen Vulkanschlott hervorgerufen werden. Die Simulation erfordert die Kopplung des Darcy-Gesetzes (erweitert um einen Term für den elektroosmotischen Druck) mit den Maxwell-Gleichungen. Das multiphysikfähige Paket FEMLAB erweist sich hierfür als besonders geeignet.

Die Bedeutung von volatilen Komponenten für das Eruptionsverhalten von Vulkanen ist lange bekannt. Lava mit einem hohen Gehalt an gasförmigen Komponenten gilt als besonders explosiv [1]. Bereits kleine Änderungen im Wassergehalt können die Viskosität von Magma und damit das Druckregime deutlich beeinflussen. Abhängig vom Wassergehalt ist es daher möglich, dass selbst bei konstantem Nachschub von Magma der Vulkan entweder ein stetiges oder periodisches Domwachstum aufweist oder aber extrem eruptiv reagiert [2].²⁾ Besonders gefährlich sind so genannte Magma-Fluid-Interaktionen, bei denen durch Kontakt von heißem Gestein und Wässern kurzfristig sehr große Energien freigesetzt werden können. In den obersten hundert Metern eines Vulkans schätzt man Überdrücke von einigen 10 MPa [2]. Neue Beobachtungen legen nahe, dass sogar Regenwasser, das z. B. während tropischer Regenzeiten in hochpermeable Vulkanschlote eindringt, derartig kritische Vulkansysteme triggern kann [3, 4]. Das Verständnis der Verteilung und Dynamik von Wasser in einem Vulkan kann folglich von entscheidender Bedeutung für die Ausbruchsvorhersage sein. Leider ist das Vulkaninnere direkten Messungen nicht zugänglich. Mit geophysikalischen Methoden lassen sich dennoch Aussagen über die inneren Strömungen gewinnen.

An vielen Vulkanen (u. a. Merapi, Stromboli, Vesuv, Piton de la Fournaise, Ätna und Kilauea) wurden an der Erdoberfläche elektrische Spannungen (sog. Eigen- oder Strömungspotentiale) gemessen, die mit unterirdischen Strömungen in Verbindung gebracht wurden [5]. Laborstudien [6] haben gezeigt, dass der elektrokinetische Effekt diese Beobachtungen erklären kann. Die Bewegung einer Flüssigkeit durch ein poröses Medium ruft einen elektrischen Strom hervor, wenn an der Grenzfläche zwischen Gesteinsmatrix und Fluid eine elektrische Doppelschicht abgeschert wird. Charakteristisch für Vulkane sind negative Spannungen, wo vorwiegend Wasser versickern, und positive Anomalien, wo unterirdische Aufstiegszonen existieren. Eine umstrittene Frage ist, welche elektroki-

netischen Ströme auch Magnetfelder hervorrufen, und ob diese ihrerseits zur Vorhersage genutzt werden können. Mit den vorliegenden Modellrechnungen gelang es, neuartige Einsichten in elektromagnetische Felder an Vulkanen zu gewinnen.

Das Modell

Das Modell erfordert die Kopplung dreier physikalischer Effekte. Das Darcy-Gesetz für hydraulische Strömungen und das Ohmsche Gesetz für Gleichströme werden durch zwei Kopplungsterme nichtlinear verbunden. In einem weiteren Schritt wird aus dem resultierenden Stromfeld die magnetische Flussdichte berechnet. Das multiphysikfähige Simulationssystem FEMLAB stellt hierfür entsprechende Anwendungsmodi bereit. Die Gleichungen werden im Folgenden kurz erläutert.

Stationäre Wasserströmungen in porösen Medien lassen sich durch das *Darcy-Gesetz* $\mathbf{u} = -\chi/\eta \nabla P$ beschreiben, wobei \mathbf{u} die Strömungsgeschwindigkeit, χ die hydraulische Permeabilität des Gesteins, η die dynamische Viskosität des Wassers und P der Druck sind. In großer Analogie zum Darcy-Gesetz wird das elektrische Stromfeld \mathbf{j} durch das *Ohmsche Gesetz* $\mathbf{j} = -\sigma \nabla V$ beschrieben, wobei σ die Leitfähigkeit und V das elektrische Potential darstellen. Diese beiden Strömungen werden durch zwei elektrokinetische Kopplungsterme verbunden. Berücksichtigt man die Quellenfreiheit beider Strömungsfelder, erhält man folgendes System von gekoppelten partiellen Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{u} &= -\nabla \cdot ((\chi/\eta) \nabla P + \alpha \nabla V) = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{j} &= -\nabla \cdot (\sigma \nabla V + \alpha \nabla P) = 0 \end{aligned}$$

Hierbei beschreibt der Term $-\alpha \nabla V$ die elektroosmotische Strömung, die durch Anlegen eines elektrischen Feldes erzeugt wird. Der Term $-\alpha \nabla P$ entspricht dem elektrokinetischen Strom, der durch die hydraulische Strömung hervorgerufen wird. Nach dem Onsagerschen Reziprozitätstheorem [7] tritt jeweils der gleiche experimentell zu bestimmende Kopplungsparameter α auf.

Das gekoppelte Gleichungssystem wurde in FEMLAB mit den im Programm enthaltenen Anwendungsmodi für Darcy-Strömungen und das Ohmsche Gesetz implementiert. Bei der Rückkopplung des elektrischen Feldes auf die Hydraulik, die im Programm nicht vorgesehen ist, wurde die Flexibilität des gleichungsbasierten Modus ausgenutzt, der die freie Definition von beliebigen Differentialgleichungen gestattet. Nach der Lösung des gekoppelten Systems mit einem nichtlinearen Gleichungslöser liegt als Ergebnis ein stationäres elektrisches Stromfeld vor. In einem weiteren Schritt lässt sich nun das aus diesem resultierende Stromfeld berechnen. Numerisch kann diese magnetostatische Berechnung entweder über das Biot-Savart-Gesetz (s.u.) oder aber über eine weitere partielle

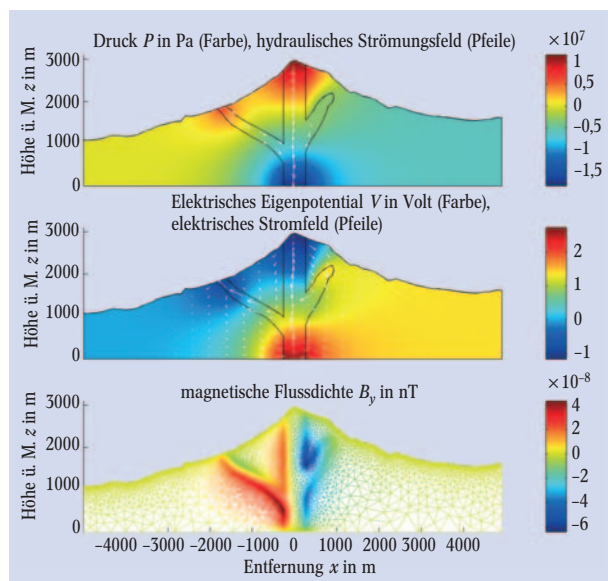


Abb. 1: Elektrokinetisches Vulkanmodell auf dem verwendeten Finite-Elemente-Netz.

Differentialgleichung realisiert werden. Unter Berücksichtigung der elektrokinetischen Ströme im Durchflutungsgesetz und unter der Annahme der *Magnetostatik* erhält man:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + \mathbf{j}^e$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = \nabla \times (\sigma^{-1} (\nabla \times \mathbf{H} - \mathbf{j}^e)) = 0,$$

wobei als eingeprengte Stromdichte auch hier der elektrokinetische Strom $\mathbf{j}^e = -\alpha \nabla P$ die Kopplung zum hydraulischen System beschreibt.

Simulation

Abbildung 1 zeigt ein Beispiel für die Simulation eines vulkanischen Systems. Vereinfacht wurden folgende Randbedingungen vorgegeben: Im oberen (stark geklüfteten) Schlotbereich findet eine Infiltration von Wasser mit einer vorgegebenen Sickergeschwindigkeit statt. Um die Massebilanz zu wahren, wurde ein weiteres komfortables Werkzeug von FEMLAB benutzt, das *integration coupling*: Dabei wurde der Wasserzustrom über den unregelmäßigen oberen Schlotrand integriert und am unteren Rand auf den Ausfluss gekoppelt. Alle anderen Ränder wurden hydraulisch isoliert. Um den Druck eindeutig zu bestimmen, wurde er in einem Punkt durch eine schwache Nebenbedingung fixiert. Das elektrische System ist am Rand vollständig isoliert, da an der Erdoberfläche keine Ströme austreten. Für ein hinreichend großes Gebiet kann der Stromfluss der erdinneren Ränder des Modellgebiets vernachlässigt werden.

Die Simulation (Abb. 1) ergibt die Verteilung des Druckes, der elektrischen Spannung, der hydraulischen und elektrischen Stromsysteme sowie der magnetischen Flussdichte. Die elektrische Spannungsverteilung zeigt die typische negative Anomalie an den beiden Schloten mit Infiltration. Interessanterweise zeichnet sich auf der rechten Seite die noch nicht ganz bis an die Oberfläche durchgedrungene Schlot- oder Kluffzone als elektrisch positive Anomalie ab. Interessantes zeigte auch die Magnetfeldberechnung. Das magnetische Feld ist um den Schlotbereich vorwiegend toroidal (vgl. 3D-Simulation Abb. 2). Für zweidimensionale Strukturen im Untergrund – wie etwa lang gestreckte Spalten oder rotationssymmetrische Kegel – ergab sich ein nur auf das Erdinnere beschränktes Magnetfeld. Für solche Strukturen ist an der Oberfläche kein Feld messbar. Inspiriert durch die Simulationsergebnisse ließ sich dies jetzt auch analytisch zeigen [8].

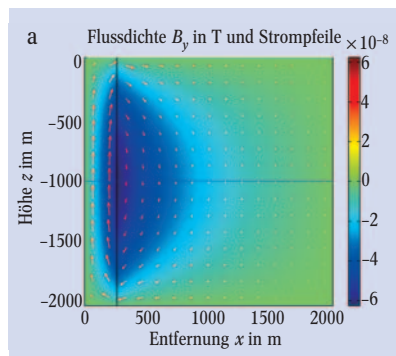


Abb. 5: a) Magnetische Flussdichte eines elektrokinetischen Strömungsmodells in vereinfachtem quadratischen Modellgebiet nach [9].

Genauigkeit

Die Genauigkeit einer Vulkansimulation kann nicht an einem physikalischen Labormodell überprüft werden. Es boten sich jedoch verschiedene numerische Möglichkeiten zur Beurteilung der Lösungsqualität. Experimente mit verschiedenen Netzknotendichten zeigten eine hohe Stabilität der Lösung. Als äußerst hilfreich erwies sich die adaptive Netzverfeinerung. Dabei wird während der Gleichungslösung das Gitter in solchen Gebieten automatisch verfeinert, wo die Lösungsfunktion stark variiert (Abb. 1 unten). Zwei weitere Genauigkeitstests umfassten für ein vereinfachtes rechteckiges Modellgebiet den Vergleich mit einer semi-analytischen Lösung [9] sowie den Vergleich der Magnetfeldberechnung aus der partiellen Differentialgleichung mit einer alternativen Berechnungsvorschrift nach dem Biot-Savart-Gesetz:

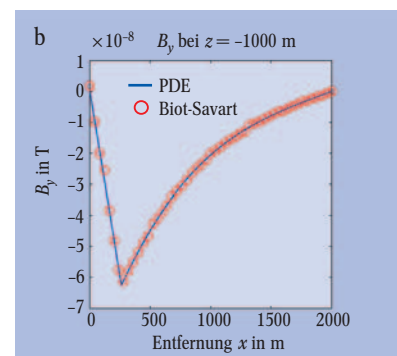
$$\mathbf{B}(x_0, y_0) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\mathbf{j} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} d^3\mathbf{r}$$

Hier wurde die Möglichkeit von FEMLAB benutzt, Funktionen von beliebigen Variablen des Modellsystems und deren Ableitungen über frei wählbare Raumgebiete zu integrieren. Das Ergebnis (Abb. 3) überzeugte durch eine sehr gute Übereinstimmung.

Diskussion

Das hier gezeigte numerische Modell erklärt in Größenordnung und Verlauf typische an Vulkanen beobachtete elektromagnetische Feldverteilungen [5]. Obwohl die Simulation noch viele Vereinfachungen benutzt, zeigt sie den Weg zu komplexeren Modellierungen. In Vulkansystemen sind noch weit mehr physikalische Prozesse, wie etwa Wärmeausbreitung, Stofftransport, Phasenumwandlungen sowie chemische Reaktionen miteinander rückgekoppelt. Die nächste Herausforderung für die elektrokinetische Simulation ist die Berücksichtigung der Wärmebilanz. Sie führt zu realistischeren Strömungssystemen, einschließlich hydrothermaler Konvektionszellen, und Mehrphasenströmungen aus Wasser und Dampf. Die verbesserte Auflösung der topographischen 3D-Höhenmodelle [10] gestattet eine immer feinere Auflösung der Modelle, steigert aber gleichzeitig den Speicherbedarf, der jedoch mit den neuen 64-bit-Rechnersystemen verfügbar sein wird.

Unabhängig von den stets wachsenden Hardware-Ressourcen, scheint es gerade in einer interdisziplinären Wissenschaft wie der



b) Lösung der partiellen Differentialgleichung (PDE) im Vergleich zur Integration nach Biot-Savart.

Vulkanologie unerlässlich, mit multiphysikalischen und offenen und bedienerfreundlichen Simulationssystemen zu arbeiten, die einen spielerischen Umgang mit hochkomplexen Systemen erlauben. Mit dem System FEMLAB war es im gezeigten Beispiel möglich, in kurzer Entwicklungszeit verschiedenste Parameterstudien durchzuführen, die neue Einsichten in grundlegende Zusammenhänge erbrachten. Die durch entfallenden Programmieraufwand frei werdenden Ressourcen konnten in analytische Betrachtungen investiert werden.

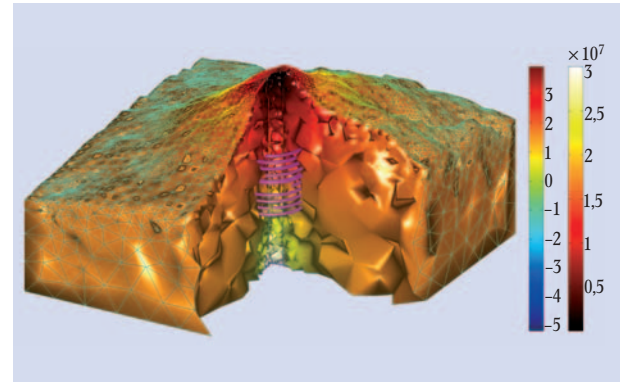


Abb. 2: Verteilung des hydraulischen Drucks [Pa] (Körperfarbe, rechte Farbskala) und des elektrokinetischen Potentials [V] (Netzfarbe, linke Skala) sowie Magnetfeldlinien in einem 3D-Modell des Vulkans Merapi.

Eine Herausforderung für die Vulkanerkundung und Überwachung besteht nun darin, neue Messdaten im Feld zu gewinnen, um die neuartigen elektromagnetischen Vulkanmodelle zu stützen. Auch hier können Simulationsrechnungen zur Optimierung der Sensorsysteme wesentlich beitragen.

Fazit

Die Simulation von komplexen, mehrfach rückgekoppelten vulkanischen Systemen ist ein faszinierendes und herausforderndes Forschungsgebiet. Das Softwaresystem FEMLAB erscheint durch seine Multiphysikfähigkeit, vielfältige Werkzeuge, Bedienerfreundlichkeit und Offenheit für Erweiterungen durch den Nutzer als ein wertvolles Werkzeug, diese Herausforderung anzugehen.

- [1] H. E. Huppert und A. W. Woods, *Nature* **420**, 493 (2002)
- [2] O. Melnik und R. S. J. Sparks, *Nature* **402**, 37 (1999)
- [3] S. Friedel, S. Byrdina, F. Jacobs und M. Zimmer, *J. Volc. Geoth. Res.* **134**, 149 (2004)
- [4] S. Byrdina, S. Friedel, J. Wassermann und J. Zlotnicki, *Geophys. Res. Lett.* **30**, 2156 (2004)
- [5] J. Zlotnicki und Y. Nishida, *Surv. in Geophys.* **24**, 291 (2003)
- [6] A. Revil, P. A. Pezard und P. W. Glover, *J. Geophys. Res.* **104** (B9), 20021 (1999)
- [7] L. Onsager, *Phys. Rev.* **37**, 405 (1931)
- [8] S. Friedel, eingereicht bei *J. Geophys. Res.*
- [9] P. M. Adler, J.-L. Le Mouél und J. Zlotnicki, *Geoph. Res. Lett.* **26**, 795 (1999)
- [10] C. Gerstenecker, C. Tiede, G. Läufer, B. Wrobel und D. Steineck, *Proc. 1st Ass. EGU* (2004)